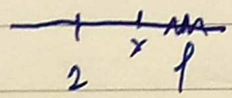
07-03-2018

Θεμιστοκλής Μητσης
Ανάλυση I, II

$a_n \neq 0$: $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell = 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ αποκλίνει



Διαλέγουμε ένα $x \in (1, \ell)$
$B_n = \dfrac{\cancel{a_{n+1}}}{a_n}$, $\lim |B_n| = \ell$ $\Rightarrow$ $\exists n_0$ $|B_n| \geq x > 1$, $\forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| > 1 \Rightarrow |\alpha_{k+1}| \geq |\alpha_k| \quad \forall k \geq k_0$$

$|\alpha_{k_0}| \leq |\alpha_{k_0+1}| \leq |\alpha_{k_0+2}| \ldots \leq |\alpha_{k_0+N}| \leq \ldots$ $\Rightarrow \alpha_k \not\to 0$

Μελετούμε την σειρά $\to \Sigma\alpha_k$ δεν συγκλίνει

• Κριτήριο της Ρίζας

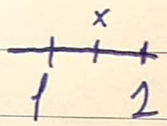
$(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$: Υποθέτουμε ότι $\exists \lim \sqrt[k]{|\alpha_k|} = \ell$

1) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \Sigma|\alpha_k|$ συγκλίνει

2) $\ell = 1 \Rightarrow$ δεν μπορούμε να ξέρουμε

3) $\ell > 1 \Rightarrow \Sigma|\alpha_k|$ αποκλίνει

1) $\ell < 1$



Διαλέγουμε $x \in (\ell, 1)$

$\lim \sqrt[k]{|\alpha_k|} = \underset{\hat{x}}{\ell} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \quad \sqrt[k]{|\alpha_k|} \leq x$

$\Rightarrow |\alpha_k| \leq x^k, \ (x<1)$

$\forall k \geq k_0$

$\Rightarrow$ (λόγω κρ. συγκρ.) $\sum_{k=k_0}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = (x + x^2 + \ldots) \qquad x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

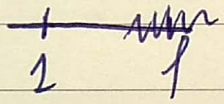
2) $a_\nu = \frac{1}{\nu}$

$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}} \to \frac{1}{1}$ $\qquad \sum |a_\nu| = \sum \frac{1}{\nu} = +\infty$

$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = e^0 = 1$ $\qquad \lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1$ $\qquad a_\nu = 1/\nu$

$\sum |a_\nu|$ συγκλίνει

3) $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_\nu$ αποκλίνει



$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \Rightarrow \exists \nu_0 : \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \geq 1, \forall \nu \geq \nu_0$

$|a_\nu| \geq 1, \forall \nu \geq \nu_0$

$a_\nu \not\to 0 \Rightarrow \sum a_\nu$ αποκλίνει

Μελετήστε την $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu}$ για τις διάφορες τιμές $x \in \mathbb{R}$

Σταθ. $x \in \mathbb{R}$

$a_\nu = \frac{x^\nu}{\nu} \Rightarrow \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \sqrt[\nu]{\frac{|x|^\nu}{\nu}} = \frac{|x|}{\sqrt[\nu]{\nu}} = |x| = \ell$

i) $\ell < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow \sum a_\nu$ συγκλίνει απολύτως

ii) $\ell > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Rightarrow \sum a_\nu$ αποκλίνει

$x = 1 \quad \sum \frac{1}{k} = +\infty$

$x = (-1) \quad \sum \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x^{k+1}/k+1|}{|x^k/k|} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} = \frac{k}{k+1}|x| \to |x| = 1 < \begin{matrix} \ell > 1 \\ \ell < 1 \end{matrix}$$

$\sum a_k b_k$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

αν $|S_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

και $b_k \searrow 0$ $(b_k \geq 0)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

$a_k = (-1)^k = S_n$

$b_k = \frac{1}{k}$

$$\left\{\begin{matrix} S_1 = (-1)^1 = -1 \\ S_2 = (-1)^2 = 1 - 1 = 0 \\ S_3 = -1 \\ S_4 = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow |S_n| \leq M = 1$$

Κριτήριο Leibnitz

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει όταν $a_k \searrow 0$

2) Αν $a_k \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} \sum (-1)^k a_k$ συγκλίνει

$a_k = \frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_k| = \frac{1}{k} \to 0$

$a_k = \frac{1}{k} \searrow 0 \quad (a_k \geq 0, \; a_k \to 0)$

$\searrow$

$\sum (-1)^k a_k = \sum \frac{1}{k} = +\infty$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{u} \left|\frac{\alpha_{u+1}}{\alpha_u}\right| = \ell < 1 \Rightarrow \sum|\alpha_u| \text{ συγκλίνει}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\alpha_{u+1}}{\alpha_u}\right| < 1 \\ \forall u\in\mathbb{N} \\ \alpha_u > 0 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \sum \alpha_u$$

Κριτήριο (Dirichlet)

Δίνονται οι ακολ. (α_u), (b_u)

α) $b_u > 0$, $b_u \to 0$ και $b_{u+1} \le b_u$, $\forall u$

β) $|S_n| \le M$, για κάποιο $M \ge 0$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_u$, $n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_u b_u \text{ συγκλίνει}$$

Αν δ.ο. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m$ $n \ge m \ge N$ ισχύει

$$\left|\sum_{u=m}^{n} \alpha_u b_u\right| < \varepsilon$$

Λημμα $(\alpha_u)(b_u)$

Ισχύει ο τύπος $\quad \sum_{u=m}^{n} \alpha_u b_u = \left[\sum_{k=m}^{n-1} S_u(b_u - b_{u+1})\right] + (S_n b_n - S_{m-1} b_m)$

$\forall n > m$

$$\sum_{u=m}^{n} \alpha_u b_u = \sum_{u=m}^{n} (S_u - S_{u-1}) b_u = \sum_{k=m}^{n} (S_u b_u - S_{u-1} b_u)$$

$$= \sum_{u=m}^{n} S_u b_u - \sum_{u=m}^{n} S_{n-1} b_u = \sum_{u=m}^{n} S_u b_u - \sum_{k=m-1}^{n-1} S_u b_{u+1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} S_u b_u + S_n b_n - \left(\sum_{u=m}^{n-1} S_u b_{u+1} + S_{m-1} b_m\right)$$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n - S_{m-1} b_m\right| \le$$

$b_k \searrow 0$

$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le M$

$$\le \left|\sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1})\right| + |S_n b_n| + |S_{m-1} b_m|$$

$$\le \sum_{k=m}^{n-1} |S_k| \underset{\underset{0}{\vee}}{(b_k - b_{k+1})} + |S_n| b_n + |S_{m-1}| b_m$$

$$\le \underbrace{\sum_{k=m}^{n-1} M(b_k - b_{k+1})} + M(b_n + b_m)$$

$$M((b_m - \cancel{b_{m+1}}) + (\cancel{b_{m+1}} - \cancel{b_{m+2}}) + \cancel{\ldots} + (\cancel{b_{n-1}} - b_n)) + M(b_n + b_m)$$

$= 2M b_m < \varepsilon$ $\Big|$ $b_k \searrow 0 \Rightarrow \exists N \; b_k < \frac{\varepsilon}{2M}, \; \forall k \ge N$

$n > m \ge N$

$p \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ Να εξετάσετε για ποιές τιμές p συγκλίνει η σειρά

Ξέρω την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ $\alpha > 1$ συγκλίνει

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-1}(1+k^2)^{-p}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-2p-1}}$ $\quad a_k = \frac{1}{k^{-1}(1+k^2)^{-p}}, \; b_k = \frac{1}{k^{-2p-1}}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^{-2p-1}}{k^{-1}(1+k^2)^{-p}} = \frac{k(1+k^2)^p}{k^{2p+1}} = \frac{(1+k^2)^p}{k^{2p}} = \left(\frac{1+k^2}{k^2}\right)^p =$$

$$\left(\frac{1}{k^2}+1\right)^p \to (0+1)^p = 1 \in (0,+\infty)$$

Άρα η σειρά συγκλίνει $\Leftrightarrow -2p-1 > 1$

$-2p > 2$

$p < -1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2} \qquad a_k = \frac{k!}{k^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^2}$$

τότε: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \frac{(k+1)!\cdot k^2}{(k+1)^2\cdot k!} = \frac{\cancel{k!}\cancel{(k+1)}k^2}{(k+1)^{\cancel{2}}\cdot \cancel{k!}} =$

$= \frac{k^2}{k+1} \to +\infty > 1$ Άρα $a_{k+1} > a_k$

Άρα $a_k \nearrow$ και $> a_1$

$\Rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum a_k = +\infty.$

Scanned by CamScanner